

Chapitre II : Les équations de Saint Venant

II-1- Introduction :

Les équations dites “ Barré de Saint-Venant”, publiées en 1871 (SAINT-VENANT A.J.C., 1871), occupent encore aujourd’hui une place primordiale dans les études en hydraulique maritime ou fluviale. Ces équations décrivent les écoulements à surface libre en eaux peu profondes, d’où leur appellation anglaise “Shallow Water Equations”. Elles sont obtenues à partir d’une intégration verticale des équations de Navier-Stokes en utilisant un certain nombre d’hypothèses. Les lecteurs peuvent trouver les détails de la dérivation des équations de Saint-Venant dans les littératures.

II-2- Les équations de barré de Saint-Venant :

Les équations de Barré de Saint-Venant (1871) sont les équations les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires graduellement et rapidement variés à surface libre. Ces équations sont non linéaires et de type hyperbolique. Dans ce paragraphe, nous allons décrire les équations de Barré de Saint-Venant établies dans leur forme 1D.

Les équations de Barré de Saint-Venant sont composées par l’équation de continuité ou l’équation de conservation de la masse et l’équation fondamentale de la dynamique connue en mécanique sous le vocable de seconde loi de Newton.

Les équations de Barré de Saint-Venant unidimensionnelles sont écrites sous certaines hypothèses qui sont les suivantes :

- La distribution des pressions est considérée comme hydrostatique dans une section. Cette hypothèse de pression hydrostatique impose des accélérations verticales faibles devant la pesanteur.
- Le liquide est incompressible, sa masse volumique est donc constante.
- La pente de la surface libre est faible. Soit z , S et α , la côte, la pente et l’angle du fond du canal respectivement. Pour un angle α petit, on a : $\sin \alpha \approx \tan \alpha = S_0 = -\frac{dz}{dx}$.
- La vitesse est supposée constante dans une section.
- En utilisant les mêmes lois empiriques qui régissent l’écoulement uniforme, les forces de frottement et de turbulence peuvent être représentées par un seul paramètre S_f .

II-2-a- L'équation de continuité :

Cette équation exprime le principe de conservation de la masse. Cela revient à dire que la variation de masse de fluide d'un élément de volume dv pendant un temps dt est égale à la masse de fluide entrant dans ce volume déduite de la masse de fluide sortante.

Considérons un volume de contrôle Ω , (Figure II-1), situé entre deux sections du canal situées aux abscisses x et $x+dx$. Le taux d'écoulement de la masse est, ρuA où ρ est la masse volumique du fluide, A est la Section mouillée, u est la vitesse de l'écoulement.

Soit q_1 le débit latéral dans le volume de contrôle Ω .

D'après la loi de conservation de la masse dans l'intervalle $[t ; t+dt]$, l'équation de continuité s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_t^{t+dt} \rho[(Q)_{x+dx} - (Q)_x]dt + \int_x^{x+dx} \rho[(A)_{t+dt} - (A)_t]dx = \int_t^{t+dt} \rho[(q_1x)_{x+dx} - (q_1x)_x]dt \quad (\text{II-1})$$

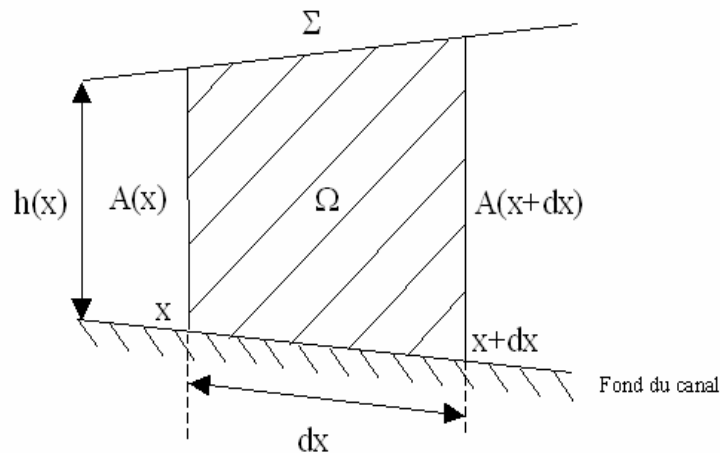


Figure II-1 : Le volume de contrôle

En supposant le liquide homogène et incompressible, le principe traduit la conservation du volume. Considérons les sections d'abscisses x et $x+dx$ (Figure II-2), à l'instant t , le débit entrant est Q , le débit sortant est $Q + \frac{dQ}{dx} dx$, la différence de volume pendant l'intervalle de temps dt est donc :- $\frac{dQ}{dx} dx \cdot dt$.

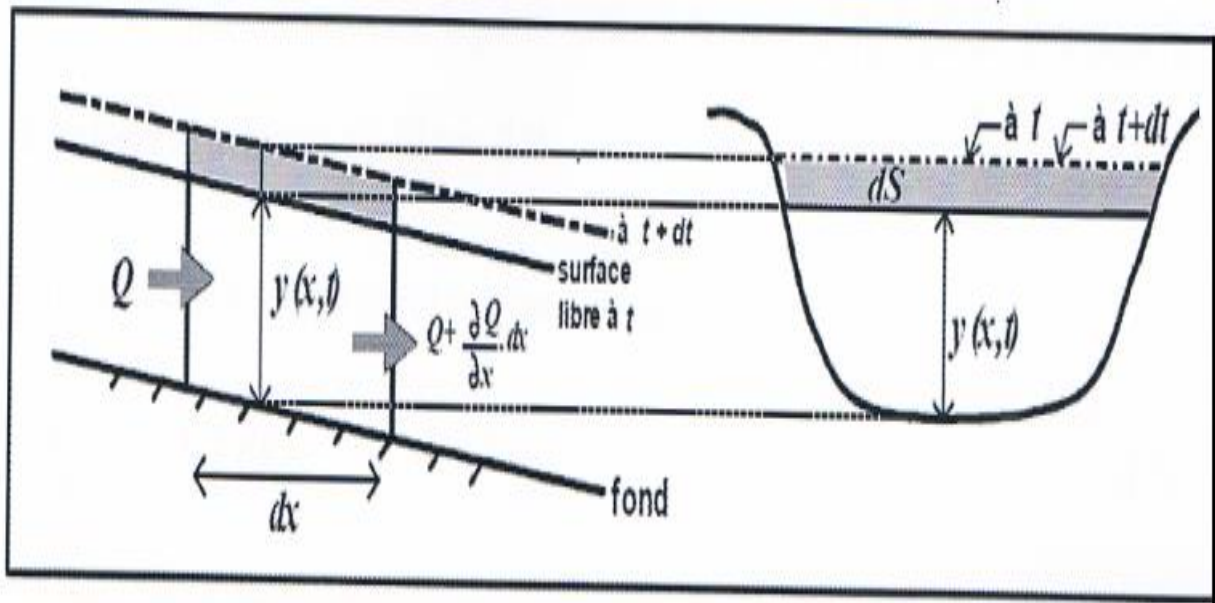


Figure II-2 : volumes entrant et sortant d'un domaine élémentaire

Cette variation est due au déplacement de la ligne d'eau entre t et $t+dt$ qui engendre une augmentation de volume : [2]

$$ds \cdot dx = \frac{ds}{dt} \cdot dt \cdot dx \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{dQ}{dx} dx \cdot dt = \frac{ds}{dt} \cdot dt \cdot dx \quad (\text{II.3})$$

$$\text{D'où, } \frac{dQ}{dx} + \frac{ds}{dx} = 0 ; \quad (\text{II.4})$$

$$\text{On a : } S = b \cdot y \text{ et } Q = V \cdot S \quad (\text{II.5})$$

II-2-b L'équation de la quantité de mouvement :

Nous considérons à nouveau deux sections d'abscisses x et $x+dx$. Elles délimitent un volume liquide D auquel nous appliquons le théorème de la quantité de mouvement. Il consiste à écrire que la variation de quantité de mouvement $\frac{dM}{dt}$ entre $x+dx$ est égale la somme des forces extérieures ($\sum F_p$) appliquées au volume considéré. Il s'agit d'une égalité vectorielle, que nous allons utiliser en projection sur l'axe du fond du chenal. [2]

Les forces de pression F_p et les forces de frottement F_f (Figure II-3).

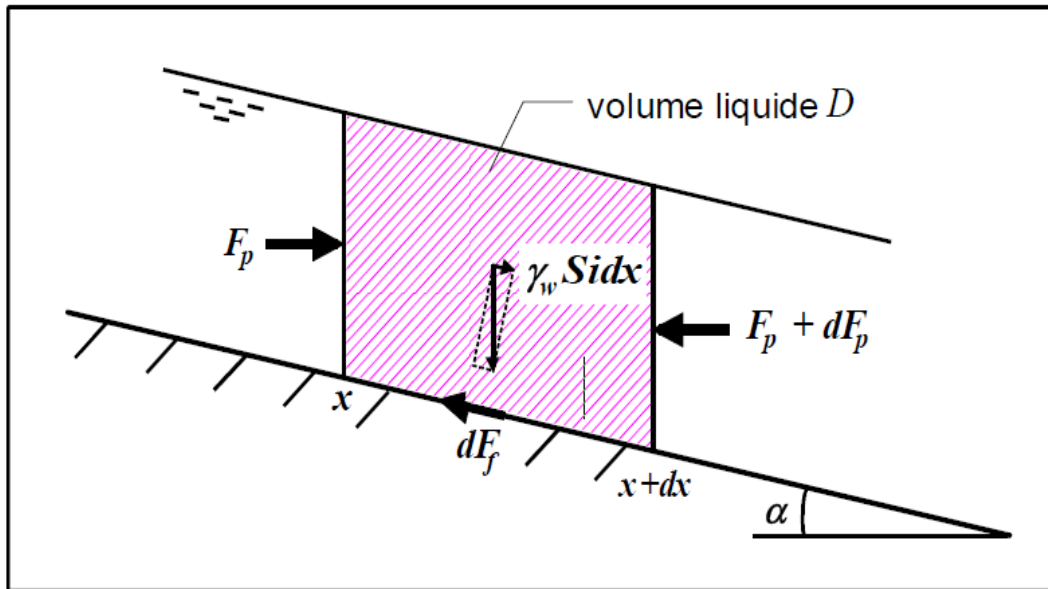


Figure II-3 : forces extérieures appliquées à un domaine D

La projection de la force de gravité vaut $dF_g = \gamma_w \cdot S \cdot i \cdot dx$ (avec $i = \sin \alpha$).

$$F_p = \gamma_w \cdot S \cdot h_G \quad (\text{II.6})$$

Désignant la distance verticale par rapport au fond du centre de gravité G de la section S c'est-à-dire le point d'application de la résultante de la force de pression appliquée à la section S . Celle appliquée à la section aval est $F_p + dF$ et la résultante appliquée au domaine D par l'extérieur est dF_p

D'où :

$$dF_p = -\frac{dF_p}{dx} dx = -\frac{\partial}{\partial x}(S \cdot h_G) dx \quad (\text{II.7})$$

On suppose ici que les forces de pression appliquées par les parois ont une résultante perpendiculaire à l'axe du canal (section uniforme).

Nous allons supposer, que la section est sensiblement rectangulaire ($S = L \cdot y$ et $h_G = y / 2$) et que la largeur L varie faiblement [2].

On aura :

$$dF_f = -\gamma_w \frac{d(L \cdot y^2 / 2)}{dx} dx = -\gamma_w \cdot L \cdot y \frac{dy}{dx} dx = -\gamma_w \cdot S \cdot \frac{dy}{dx} dx. \quad (\text{II.8})$$

Enfin, la force de frottement appliquée par les parois est :

$$dF_f = -\tau_0 \cdot P \cdot dx = (-\gamma_w \cdot R \cdot j) \cdot P \cdot dx = -\gamma_w \cdot S \cdot j \cdot dx \quad (\text{II.9})$$

Où :

τ_0 : Force de frottement par unité de surface.

J : Est la pente de la ligne de charge.

Au total : $\sum F_e = dF_g + dF_p + dF_f$

Pour calculer maintenant la variation de quantité de mouvement, considérons à l'instant t le domaine D délimité par les deux sections écartées de dx et le domaine D' obtenu à l'instant $t+dt$ (Figure II-4).

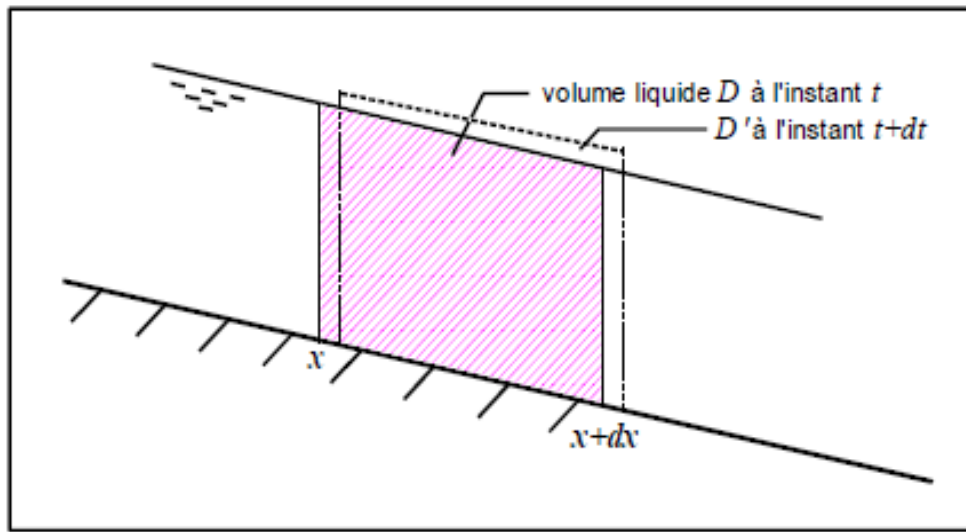


Figure II-4 : déformation du domaine pendant dt

La variation dM de la quantité de mouvement lorsque l'on passe de t à $t+dt$ est la somme algébrique de :

- la variation de quantité de mouvement du volume commun à D et D' , soit

$$d(\rho_w \cdot S \cdot V) dx = d(Q \cdot \rho_w) dx = \rho_w \left(\frac{dQ}{dt} dt \right) dx = \rho_w \cdot \frac{dQ}{dt} dt \cdot dx \quad (\text{II.10})$$

- la quantité de mouvement perdu à l'entrée de D , soit :

$$\rho_w (V \cdot dt) \cdot S \cdot V = \rho_w \cdot V^2 \cdot S \cdot dt = \rho_w \cdot \frac{Q^2}{S} dt \quad (\text{II.11})$$

- la quantité de mouvement gagnée à l'entrée de D , c'est-à-dire la valeur ci-dessus en remplaçant x par $x+dx$.

La somme algébrique des deux derniers termes est :

$$\frac{d(\rho_w \cdot \frac{Q^2}{S})}{dx} dx = \rho_w \cdot \frac{d(\frac{Q^2}{S})}{dx} \cdot dx \cdot dt \quad (\text{II.12})$$

Finalement, la variation globale de la quantité de mouvement pendant dt est :

$$dM = \rho_w \left[\frac{dQ}{dt} + \frac{d(\frac{Q^2}{S})}{dx} \right] dt \cdot dx. \quad (\text{II.13})$$

Le théorème de la quantité de mouvement donne $\frac{dM}{dt} = \sum F_e$ (en projection sur l'axe du fond) après division par $\rho_w = \gamma_w / g$ nous obtenons.

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{d(\frac{Q^2}{S})}{dx} = g \cdot S \cdot (i - j - \frac{dy}{dx}). \quad (\text{II.14})$$

Telle est la seconde équation qui, jointe de l'équation de continuité, devait permettre de résoudre le problème moyennant la connaissance adéquate des conditions initiales et aux limites.

Les inconnues sont $Q(x, t)$ et $y(x, t)$ ou indifféremment $V(x, t)$ et $y(x, t)$ puisque à chaque instant $Q = V \cdot S$.

On peut admettre qu'à chaque instant, la formule du régime uniforme est valable, ainsi :

- Avec la formule Chézy :

$$J = \frac{V^2}{R \cdot C^2} \quad (\text{II.15})$$

C : coefficient de Chézy.

R : rayon hydraulique.

- Avec la formule Strickler :

$$J = \frac{V^2}{K^2 \cdot R^{4/3}} \quad (\text{II.16})$$

K : coefficient de Strickler.

Finalement, on regroupe ci-dessous ces deux équations suivant deux formulations :

- **Formulations en débit**

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx} + \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dQ}{dt} + \frac{d(\frac{Q^2}{S})}{dx} = g \cdot S (i - j - \frac{dy}{dx}) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

- Formulations équivalent en vitesse

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + V \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{dV}{dx} = 0 \\ \frac{dV}{dt} + V \cdot \frac{dV}{dx} + g \cdot \frac{dy}{dx} - g \cdot (i - j) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

II-3- Conclusion :

Les équations de Barré de Saint Venant (1871) sont une forme intégrée (intégration selon la hauteur) des équations de Navier Stocks. Elles permettent de calculer les hauteurs d'eau et vitesse moyennes le long de la direction d'écoulement en fonction du temps. Elles ne sont applicables qu'en régime graduellement varié. Elles ont été démontrées pour des sections rectangulaires, mais sont valables pour des sections de forme quelconque. Dans ces équations les inconnues V , y sont des fonctions de t , x .